मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

अनुक्रमांक .....

068015

नाम .....

131

# 324(JB)

**2025**

## गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ] [ पूर्णांक : 100

**नोट :** प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

*Note :* First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

**निर्देश :** i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

*Instructions :*

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) समस्त त्रिभुजों के समुच्चय $A$ में, $R=\{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है $\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध $R$

i) स्वतुल्य और सममित है, किन्तु संक्रामक नहीं

ii) स्वतुल्य और संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं

iii) सममित और संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य नहीं

iv) स्वतुल्य है, सममित है और संक्रामक भी है 1

ख) माना $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक को प्रकट करता है, जो $x$ से कम या उसके बराबर है। तब $f(x)=[x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f:R\to R$ होगा

i) एकैकी और आच्छादक ii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं

iii) आच्छादक, किन्तु एकैकी नहीं iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक 1

ग) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\log x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+5y=\cos x$ की कोटि है

i) 2 ii) 3 iii) 5 iv) 6 1

घ) यदि बिन्दुओं $P$ और $Q$ के निर्देशांक क्रमशः $(2, 3, 0)$ एवं $(-1, -2, -4)$ हों, तो सदिश $\overrightarrow{PQ}$ होगा

i) $-3\hat{i}-5\hat{j}+4\hat{k}$ ii) $3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$

iii) $-3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$ iv) $3\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$ 1

ङ) यदि $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, तो $X$ होगा

i) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 1

1. Attempt *all* the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write in your answer-book :

a) The relation $R$, defined by $R=\{(T_1, T_2) : T_1$ is similar to $T_2\}$, in the set $A$ of all triangles, is

i) reflexive and symmetric, but not transitive

ii) reflexive and transitive, but not symmetric

iii) symmetric and transitive, but not reflexive

iv) reflexive, symmetric and also transitive 1

b) Let $[x]$ represents the greatest integer which is less than or equal to $x$. Then the function $f:R\to R$ defined by $f(x)=[x]$ will be

i) One-one and onto ii) One-one, but not onto

iii) Onto, but not one-one iv) Neither one-one nor onto 1

c) The order of the differential equation

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\log x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+5y=\cos x$$ will be

i) 2 ii) 3 iii) 5 iv) 6 1

d) If the coordinates of the points $P$ and $Q$ are respectively $(2, 3, 0)$ and $(-1, -2, -4)$, the vector $\overrightarrow{PQ}$ will be

i) $-3\hat{i}-5\hat{j}+4\hat{k}$ ii) $3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$

iii) $-3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$ iv) $3\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$ 1

e) If $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ and $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, then $X$ will be

i) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) जाँच कीजिए कि क्या $f(x)=x^2-\sin x+5$ द्वारा परिभाषित फलन $x=\pi$ पर सतत है। 1

ग) $\int \text{cosec}\, x(\text{cosec}\, x+\cot x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

घ) यदि $2P(A)=P(B)=\frac{5}{13}$ और $P(A/B)=\frac{2}{5}$ तो $P(A\cup B)$ ज्ञात कीजिए। 1

ङ) $y$-अक्ष की दिक्-कोज्यायें ज्ञात कीजिए। 1

2. Do *all* the parts of the following :

a) Find the principal value of $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$. 1

b) Test whether the function defined by $f(x)=x^2-\sin x+5$ is continuous at $x=\pi$. 1

c) Evaluate : $\int \text{cosec}\, x(\text{cosec}\, x+\cot x)dx$. 1

d) If $2P(A)=P(B)=\frac{5}{13}$ and $P(A/B)=\frac{2}{5}$, then find $P(A\cup B)$. 1

e) Find the direction-cosines of the $y$-axis. 1

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) $x$ के सापेक्ष $x^{\sin x}$ का अवकलन कीजिए, जबकि $x>0$ है। 2

ख) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ग) मान लीजिए कि समुच्चय $N\times N$ में एक सम्बन्ध $R$ निम्नवत् परिभाषित है :

$(a, b)\, R\, (c, d)$ यदि और केवल यदि $a+d=b+c$.

सिद्ध कीजिए कि $R$ एक तुल्यता सम्बन्ध है। 2

घ) सदिश $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ का, सदिश $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। 2

3. Do *all* the parts of the following :

a) Differentiate $x^{\sin x}$ with respect to $x$, while $x>0$. 2

b) Evaluate : $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$. 2

c) Let a relation $R$ be defined in the set $N\times N$ as follows :

$(a, b)\, R\, (c, d)$ if and only if $a+d=b+c$.

Prove that $R$ is an equivalence relation. 2

d) Find the projection of the vector $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ on the vector $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$. 2

4. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) यादृच्छया चुने गये किसी अधिवर्ष में 53 मंगलवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

ग) यदि $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A'A=I$. 2

घ) दर्शाइए कि प्रदत्त फलन $f$, $f(x)=x^3-3x^2+4x$, $x \in R$, $R$ में वर्धमान फलन है। 2

4. Do *all* the parts of the following :

a) Evaluate : $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. 2

b) In a leap year, selected at random, find the probability that there are 53 Tuesdays. 2

c) If $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, verify that $A'A=I$. 2

d) Show that the given function $f$, $f(x)=x^3-3x^2+4x$, $x \in R$ is an increasing function in $R$. 2

5. **निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :**

क) सारणिक $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ख) यदि $y=(\tan^{-1}x)^2$, दर्शाइए कि $(x^2+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(x^2+1)\frac{dy}{dx}=2$. 5

ग) रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और

$\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

घ) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x$, जहाँ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$. 5

ङ) अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\,(x\neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 5

5. Do *all* the parts of the following :

a) Find the value of the determinant $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$. 5

b) If $y=(\tan^{-1}x)^2$, show that $(x^2+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(x^2+1)\frac{dy}{dx}=2$. 5

c) Find the shortest distance between the lines whose vector equations are

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ and $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$. 5

d) Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x$, where $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$. 5

e) Find the general solution of the differential equation $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2(x\neq 0)$. 5

https://www.upboardonline.com

6. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

ख) व्यवरोधों $x+y\leq 1, -x+y\leq 0, x\geq 0, y\geq 0$ के अन्तर्गत $Z=x+2y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए। 5

ग) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके विकर्ण $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ हैं। 5

घ) यदि दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के बीच का कोण $\theta$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$. 5

ङ) एक पाइप से रेत 12 सेमी$^3$/सेकण्ड की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है ? 5

6. Do *all* the parts of the following :

a) A die was thrown twice and the sum of the numbers which appeared was found to be 6. Find the conditional probability that the number 4 appears at least once. 5

b) Maximize $Z = x + 2y$ by graphical method under the constraints

$x+y \leq 1, -x+y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$ 5

c) Find the area of the parallelogram whose diagonals are

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 5

d) If $\theta$ be the angle between two unit vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$, prove that

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|.$$ 5

e) Sand is falling from a pipe at the rate of 12 $cm^3$/second. The falling sand forms such a cone on the ground that its height is always one-sixth of the radius of its base. At which rate is the height of the cone formed by sand increasing while its height is 4 cm ? 5

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$2x + y + z = 1$$

$$x - 2y - z = \frac{3}{2}$$

$$3y - 5z = 9.$$ 8

ख) यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x+y)$. 8

7. Do any *one* part of the following :

a) Solve by matrix method the following system of equations :

$$2x + y + z = 1$$

$$x - 2y - z = \frac{3}{2}$$

$$3y - 5z = 9.$$ 8

b) If $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, prove that $F(x)\,F(y)=F(x+y)$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है। 8

ख) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)\,dx=\frac{\pi}{8}\log 2$. 8

8. Do any *one* part of the following :

a) Prove that the semi-vertical angle of the cone of given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}\sqrt{2}$. 8

b) Prove that $\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)\,dx=\frac{\pi}{8}\log 2$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

ख) अवकल समीकरण $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 8

9. Do any *one* part of the following :

a) Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 8

b) Find the general solution of the differential equation $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$. 8