अनुक्रमांक ____________

नाम ____________

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 11

131

324(IZ)

2025

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्टत: उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।

(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।

(v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।

(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

General Instructions :

(i) There are in all **nine** questions in this question paper.

(ii) **All** questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

(vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) किस बिन्दु पर वक्र $y^2 = 4x$ तथा रेखा $y = x + 3$ की ढाल बराबर होगी ?

(A) (1, 2)

(B) (2, 1)

(C) (–1, 2)

(D) (1, –2)

(ख) यदि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, सदिश $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ पर लम्बवत् है, तो λ का मान है :

(A) 3

(B) 0

(C) 4

(D) 6

(ग) यदि A एक वर्ग आव्यूह है तथा $A^2 = A$ है, तो $(A + I)^3 - 7A$ होगा :

(A) A

(B) 3A

(C) I – A

(D) I

(घ) $\int$ [illegible] dx का मान होगा। 1

(A) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + C$

(B) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + C$

(C) $\cos^2 x - \sin^2 x + C$

(D) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$

(ङ) फलन $f : R \rightarrow R, f(x) = 3x \ \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन f होगा : 1

(A) एकैकी नहीं

(B) आच्छादक नहीं

(C) आच्छादक

(D) बहु-एकैकी

Do **all** the parts :

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) At which point the slope of the curve $y^2 = 4x$ is equal to the slope of the line $y = x + 3$? 1

(A) (1, 2)

(B) (2, 1)

(C) (–1, 2)

(D) (1, –2)

7183893

(b) If the vector $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ is perpendicular to the vector $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$, the of λ is :

(A) 3

(B) 0

(C) 4

(D) 6

71838893

(c) If A is a square matrix and $A^2 = A$, then $(A + I)^3 - 7A$ will be :

(A) A

(B) 3A

(C) I – A

(D) I

71838893

(d) The value of $\int \cos^2 x \, dx$ will be :

(A) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + C$

(B) $-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x}{4} + C$

(C) $\cos^2 x - \sin^2 x + C$

(D) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$

71838893

(e) A function $f : R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = 3x \; \forall x \in R$, then function f will b

(A) Not one-one

(B) Not onto

(C) Onto

(D) Many-one

71838893

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $y = A + Be^x$ है, तो सिद्ध कीजिए $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ जहाँ A तथा B अचर हैं । 1

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$ को हल कीजिए । 1

(ग) दर्शाइए कि $f(x) = |x|$, x के सभी मानों पर संतत है । 1

(घ) दो दी गयी घटनाएँ A तथा B ऐसी हैं कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, तब P(A-नहीं और B-नहीं) को ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) यदि $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{3, 4, 5\}$, तो A से B में सम्बन्धों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए । 1

2. Do all the parts :

(a) If $y = A + Be^x$, then prove that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$, where A and B are constants. 1

(b) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$. 1

(c) Show that $f(x) = |x|$ is continuous for all values of x. 1

(d) Given any two events A and B are such that $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, then find P(not A and not B). 1

(e) If $A = \{1, 2\}$ and $B = \{3, 4, 5\}$, then find all number of relations from A to B. 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $y = A \cos \theta + B \sin \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y$ 2

(ख) बिन्दु (3, –2, –5) से गुजरने वाली तथा सदिश $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x \cos x$ को हल कीजिए। 2

(घ) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ सदिश हैं और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ है, तो $(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all the parts :

(a) If $y = A \cos \theta + B \sin \theta$, then prove that $\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y$ 2

(b) Find the Cartesian equation of a line which passes through point (3, –2, –5) and parallel to the vector $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$. 2

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^x \cos x$. 2

(d) If $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are vectors and $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then find the value of $(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$. 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि R_1 तथा R_2, समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(R_1 \cap R_2)$ भी A में एक तुल्यता सम्बन्ध है । 2

(ख) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ग) एक परिवार में दो बच्चे हैं । यह ज्ञात हो कि बच्चों में कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 2

(घ) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f (i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है । 2

4. Do **all** the parts :

(a) If R_1 and R_2 be two equivalence relations of a set A, then prove that $(R_1 \cap R_2)$ also be an equivalence relation on A. 2

(b) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$. 2

(c) There are two children in a family. It is known that there is at least one child is boy, then find the probability that both children are boy. 2

(d) Find the interval in which the given function $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is (i) Increasing (ii) Decreasing. 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$, समीकरण $AA' = I$ को संतुष्ट करता है, तो x, y तथा z के मानों को ज्ञात कीजिए । 5

(ख) $y = x^{\cos x} + (\sin x)^x$ का अवकल गुणांक x सापेक्ष ज्ञात कीजिए । 5

(ग) रेखाओं $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + y$ का न्यूनतम मान आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए :

$x + y \leq 8, 3x + 5y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि $f : R \to \{x \in R : x \in (-1, 1)\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है । 5

5. Do **all** the parts :

(a) If the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$, satisfies the equation $AA' = I$, then find the values of x, y and z. 5

(b) Find the differential coefficient of $y = x^{\cos x} + (\sin x)^x$ with respect to x. 5

(c) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$. 5

(d) Find the minimum value of $Z = 3x + y$ by the graphical method under the following constraints :

$x + y \leq 8, 3x + 5y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ 5

(e) If a function $f : R \to \{x \in R : x \in (-1, 1)\}$ is defined as $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, x \in R$, then prove that f is one-one and onto. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दिखाइए कि $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$, $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ तथा $(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं । **5**

(ख) यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0, -1 < x < 1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1-x)^2}$ **5**

(ग) एक थैले में 10 सफेद तथा 5 काली गेंदें हैं । दो गेंद एक के बाद एक निकाली जाती हैं और पहली गेंद दूसरी को निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है । मान लीजिए कि थैले में से प्रत्येक गेंद का निकालना समसंभाव्य है, तो दोनों सफेद गेंद निकालने की क्या प्रायिकता है ? **5**

(घ) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ होता है । **5**

(ङ) हल कीजिए : $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x - 1}\,dx$ **5**

6. Do **all** the parts :

(a) Show that $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$, $(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$ and $(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$ are the position vectors of vertices of a right angle triangle. https://www.upboardonline.com **5**

(b) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0, -1 < x < 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ **5**

(c) There are 10 white and 5 black balls in a bag. Two balls are drawn one by one. First ball is not placed back before the second is taken out. Assume that the taking out of each ball from the bag is equally likely. What is the probability that both balls taken out are white ? **5**

(d) Prove that $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ is always true for any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$. **5**

(e) Solve : $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$ **5**

7183893

कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A(\text{adj } A)$ $|A|I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

(ख) समीकरण निकाय 8

$x + y + z = 2,$

$2x + y - 3z = 0$

$x - y + z - 4 = 0$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए ।

7. Do any **one** part :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, then verify that $A(\text{adj } A) = |A|I$ and find A^{-1}. 8

(b) Solve the system of equations 8

$x + y + z = 2,$

$2x + y - 3z = 0$

$x - y + z - 4 = 0$ by matrix method.

8. **कोई एक खण्ड कीजिए :**

(क) सिद्ध कीजिए : $\int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan\theta)d\theta = \frac{\pi}{8}\log_e 2$ 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ वाले लम्ब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है । 8

Do any **one** part :

(a) Prove that : $\int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan\theta)d\theta = \frac{\pi}{8}\log_e 2$ **8**

(b) Prove that the radius of the right circular cylinder of maximum curved surface inscribed in a cone is half of the radius of the cone. **8**

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) (i) यदि $y = 600\, e^{-7x} + 500\, e^{7x}$, तो दिखाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ **4**

(ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **4**

(ख) समाकल $\int \frac{\sec^2 2\theta\, d\theta}{(\cot\theta - \tan\theta)^2}$ को हल कीजिए। **8**

9. Do any **one** part :

(a) (i) If $y = 600\, e^{-7x} + 500\, e^{7x}$, then show that $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ **4**

(ii) Find the area bounded by the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. **4**

(b) Solve the integral $\int \frac{\sec^2 2\theta\, d\theta}{(\cot\theta - \tan\theta)^2}$ **8**

7183893